



# Wpływ kohortowych tablic trwania życia na wysokość świadczeń emerytalnych

**Barbara Więckowska**

Katedra Ubezpieczenia Społecznego  
Szkoła Główna Handlowa w Warszawie

Warszawa, 27 października 2010 r.

# Plan prezentacji

- ❖ Wprowadzenie
- ❖ Przegląd modeli i metod prognozowania umieralności
- ❖ Obliczanie przeciętnego (dalszego) trwania życia
- ❖ Model Lee i Cartera oraz jego modyfikacje
- ❖ Wyniki prognozy przeciętnego dalszego trwania życia
- ❖ Emerytalne implikacja wyników prognozy
- ❖ Podsumowanie i wnioski

# Wprowadzenie

## ❖ Motywacja

- Do określenia wysokości świadczeń emerytalnych w systemie o zdefiniowanej składce wymagane jest określenie długości wypłat

## ❖ Problem

- Przekrojowe tablice trwania życia przeszacowują rzeczywistą umieralność poszczególnych kohort (grup urodzonych w tym samym roku)

## ❖ Cele pracy

- Przedstawienie metody prognozowania trwania życia w oparciu o zmodyfikowany model Lee i Cartera
- Ilustracja dla Polski - prognoza na lata 2006–2050
- Implikacje emerytalne wyników

# Wczesne modele umieralności

## ❖ Prace pionierskie:

- Jan de Witt (1671)
- Edmund Halley (1693)
- Nicolas Bernoulli (1709)
- Benjamin Gompertz (1825)

$$\mu_t = B \cdot c^t$$

- William Makeham (1860)

$$\mu_t = A + B \cdot c^t$$

S. Haberman, *Landmarks in the history of actuarial science (up to 1919)*, Actuarial Research Paper no. 84, Department of Actuarial Science and Statistics, City University, London.

# Modele umieralności - rozwój

Zmiany paradygmatu modelowania umieralności

Modele:

- ❖ Dyskretne → Ciągłe
- ❖ Dwustanowe → Wielostanowe
- ❖ Homogeniczne → Heterogeniczne
- ❖ Statyczne → Dynamiczne
- ❖ DETERMINISTYCZNE → STOCHASTYCZNE

E. Pitacco, *From Halley to „frailty”: a review of survival models for actuarial calculations*,  
Dipartimento di Matematica Applicata, University of Trieste, Trieste.

## Prognozowanie – podstawowe informacje

Zakładając, że intensywność umieralności  $\mu$  zależy od wieku ( $x$ ) i roku kalendarzowego ( $t$ ), można ją zapisać jako:

$$\mu = \Gamma(x, t)$$

Możliwe są trzy podejścia do prognozowania:

- wertykalne (zależne od wieku),
- horyzontalne (zależne od okresu),
- diagonalne (kohortowe).

# Prognozowanie – podstawowe informacje

❖ Plany obserwacji: *wiek, okres, kohorta*

Okres \ Wiek	...	$t-1$	$t$	$t+1$	...
0	...	$\mu(0, t-1)$	$\mu(0, t)$	$\mu(0, t+1)$	...
1	...	$\mu(1, t-1)$	$\mu(1, t)$	$\mu(1, t+1)$	...
...	...	...	...	...	...
$x$	...	$\mu(x, t-1)$	$\mu(x, t)$	$\mu(x, t+1)$	...
$x + 1$	...	$\mu(x+1, t-1)$	$\mu(x+1, t)$	$\mu(x+1, t+1)$	...
...	...	...	...	...	...
$\omega$	...	$\mu(\omega, t-1)$	$\mu(\omega, t)$	$\mu(\omega, t+1)$	...

# Model Lee i Cartera

## ❖ Oryginalna postać modelu:

$$\ln m(x, t) = a_x + b_x \cdot K_t + \xi_{x,t}$$

$$K_t = K_{t-1} + c + \varepsilon_t$$

$$\sum_x b_x = 1 \quad \sum_t K_t = 0$$

Założenia o błędach: biały szum ze stałą wariancją (homoskedastyczne reszty, rzadkość w praktyce)

Lee R.D., L. Carter (1992), Modeling and Forecasting the Time Series of U.S. Mortality, *Journal of the American Statistical Association*, 87 (419): 659–671.



## Udoskonalenia modelu Lee i Cartera

- ❖ **Modyfikacja modelu** – liczba zgonów jest zmienną losową o rozkładzie Poissona:

$$D(x, t) \sim \text{Poisson} (E(x, t) \cdot \mu(x, t))$$

$$\ln \mu(x, t) = a_x + b_x \cdot K_t$$

$$K_t = K_{t-1} + c + \varepsilon_t$$

Taki model dopuszcza heteroskedastyczność reszt między oszacowaną a zaobserwowaną liczbą zgonów

Brouhns, N., M. Denuit, J. Vermunt (2002). A Poisson log-linear regression approach to the construction of projected life tables. *Insurance: Math. Econ.* 31 (3): 373–393.

# Udoskonalenia modelu Lee i Cartera

- ❖ Metody estymacji:
  - Lee i Carter zaproponowali metodę rozkładu wartości osobliwych (SVD), odpowiadającą KMNK
  - Krytyka: metoda nieodpowiednia w przypadku heteroskedastycznych reszt
  - Proponowane alternatywy: ważona MNK lub **MNW**
- ❖ Źródła niepewności prognozy z modelu L-C:
  1. Losowa liczba zgonów  $D_x$  (rozkład Poissona)
  2. Niepewność oszacowań parametrów  $a_x$ ,  $b_x$  i  $\kappa_t$
  3. Ekstrapolacja komponentu  $\kappa_t$

Alho, J. (2000). Discussion of Lee (2000). *North American Actuarial Journal*, 4 (1): 91-93.

Keilman, N., D.Q. Pham (2006), Prediction intervals for Lee-Carter-based mortality forecasts. Referat na *European Population Conference 2006*, Liverpool, 21-24.06.2006.

# Ilustracja: prognoza dla Polski

## ❖ Dane wyjściowe (GUS)

- jednoroczne grupy wieku, w **latach osiągniętych**
- zgony według wieku i kohort ( $D$ ), lata 1960–2005
- liczba ludności na początku roku ( $P$ ), 1960–2006
- liczba urodzeń w ciągu roku ( $B$ ), 1960–2005
- dane oczyszczone; próba ograniczona do **1990–2005**

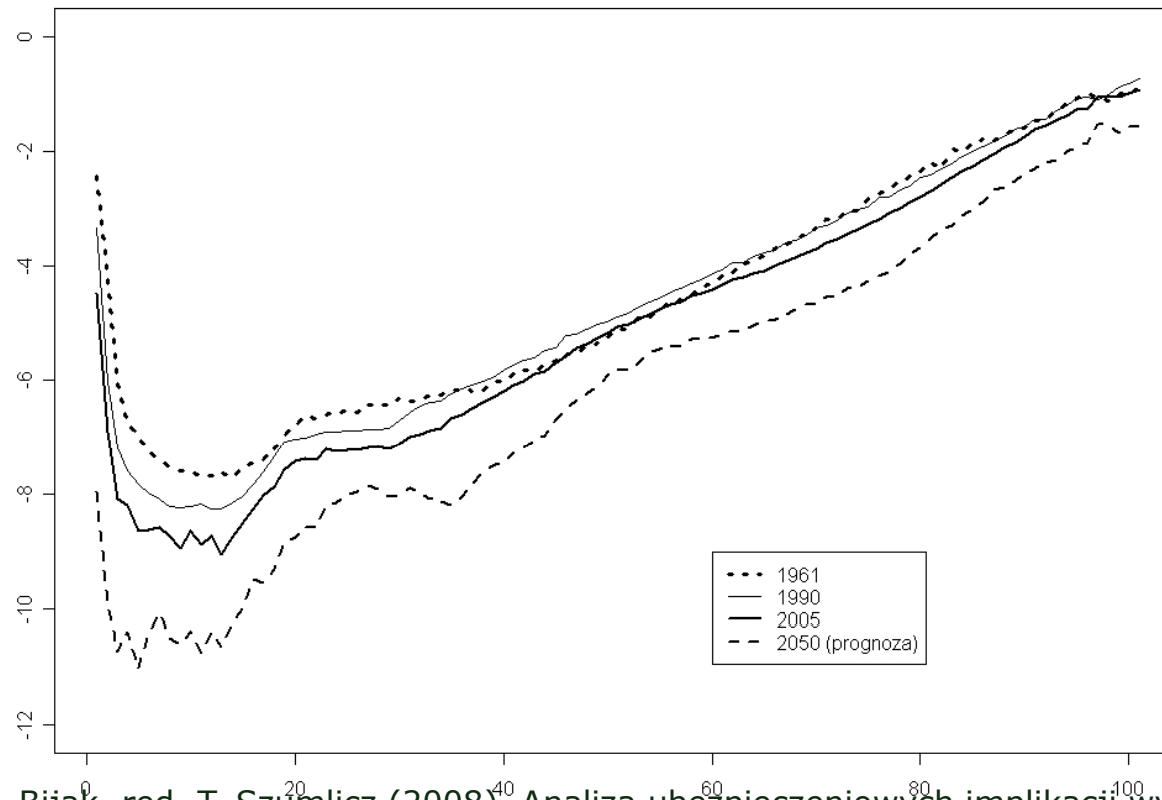
## ❖ Obliczenia

- Estymacja parametrów: MNW dla rozkładu Poissona
- Niepewność estymacji: metoda *bootstrap* (100 prób)  $\times$
- Niepewność ekstrapolacji  $\kappa_t$ : Monte Carlo (1000 prób)
- Oprogramowanie: własny kod w R ([www.r-project.org](http://www.r-project.org))
- Procedura dość czasochłonna (55 h)

# Ilustracja: prognoza dla Polski

- ❖ Wzorce  $\ln[\mu(x,t)]$  według wieku dla obu płci Polska, 1960, 2005 i 2050 (prognoza)

Logarytmy współczynników zgonów: Polska, M + K, 1961-2050

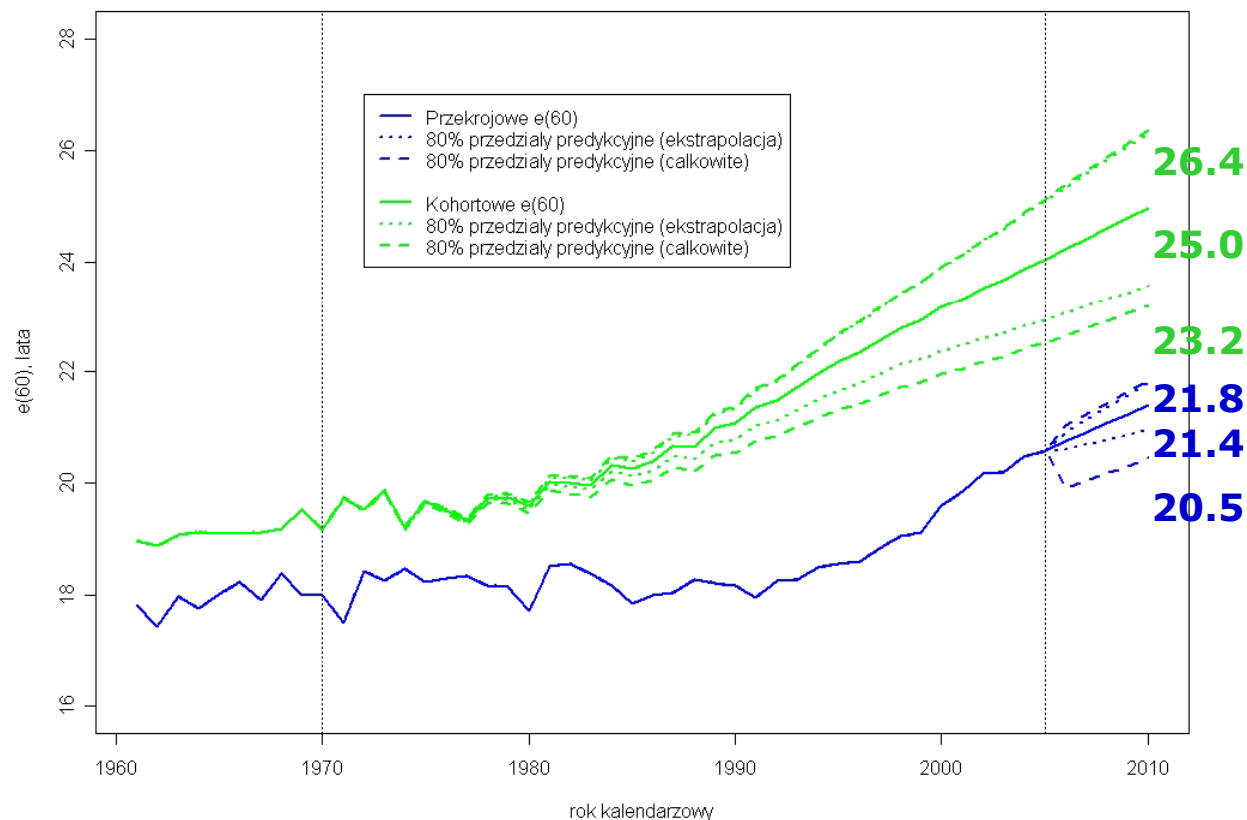


B. Więckowska, J. Bijak, red. T. Szumlicz (2008), Analiza ubezpieczeniowych implikacji wyników prognozy przeciętnego dalszego trwania życia uzyskanej metodą Lee i Cartera, wydanie specjalne *Wiadomości ubezpieczeniowych*, PIU, Warszawa, styczeń 2008

# Przeciętne dalsze trwanie życia

- ❖ Przekrojowe i kohortowe  $e(65)$  dla Polski 1960-2010, M + K  
80% przedziały predykcyjne dla różnych źródeł niepewności

Przeciętne dalsze trwanie życia w wieku 60 lat, przekrojowe i kohortowe: Polska, M + K, 1961-2010

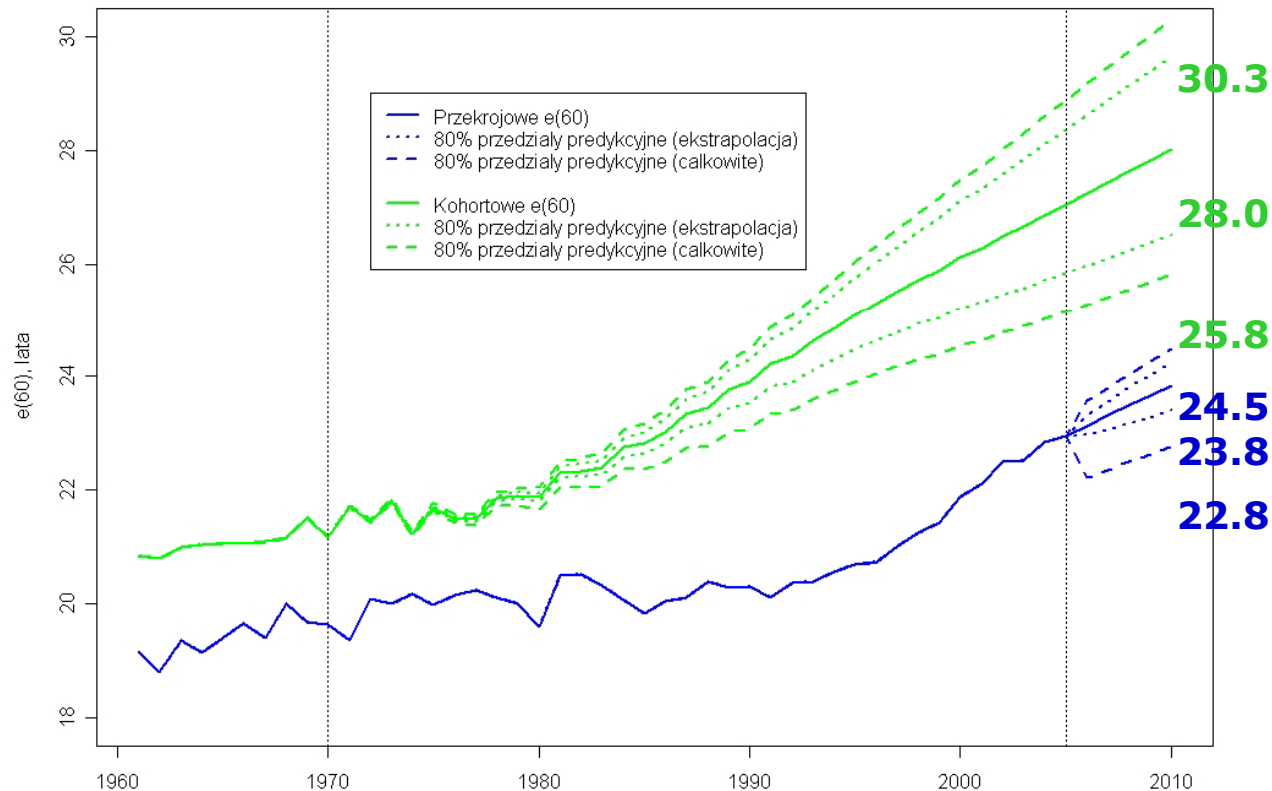


B. Więckowska, J. Bijak, red. T. Szumlicz (2008), Analiza ubezpieczeniowych implikacji wyników prognozy przeciętnego dalszego trwania życia uzyskanej metodą Lee i Cartera, wydanie specjalne *Wiadomości ubezpieczeniowych*, PIU, Warszawa, styczeń 2008

# Przeciętne dalsze trwanie życia

- ❖ Przekrojowe i kohortowe  $e(65)$  dla Polski 1960-2010, kobiety  
80% przedziały predykcyjne dla różnych źródeł niepewności

Przeciętne dalsze trwanie życia w wieku 60 lat, przekrojowe i kohortowe: Polska, K, 1961-2010

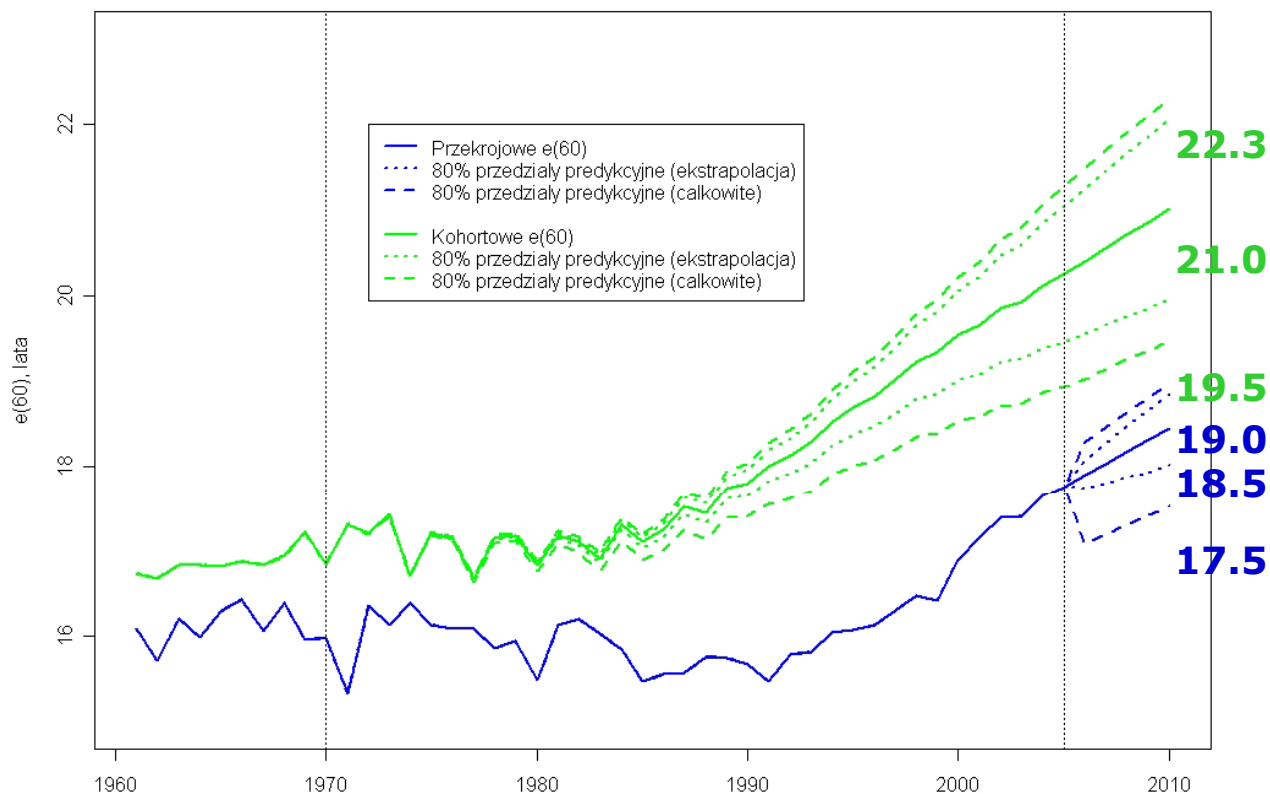


B. Więckowska, J. Bijak, red. T. Szumlicz (2008), *Analiza ubezpieczeniowych implikacji wyników prognozy przeciętnego dalszego trwania życia uzyskanej metodą Lee i Cartera*, wydanie specjalne *Wiadomości ubezpieczeniowych*, PIU, Warszawa, styczeń 2008

# Przeciętne dalsze trwanie życia

- ❖ Przekrojowe i kohortowe  $e(65)$  dla Polski 1960-2010, mężczyźni  
80% przedziały predykcyjne dla różnych źródeł niepewności

Przeciętne dalsze trwanie życia w wieku 60 lat, przekrojowe i kohortowe: Polska, M, 1961-2010



B. Więckowska, J. Bijak, red. T. Szumlicz (2008), *Analiza ubezpieczeniowych implikacji wyników prognozy przeciętnego dalszego trwania życia uzyskanej metodą Lee i Cartera*, wydanie specjalne *Wiadomości ubezpieczeniowych*, PIU, Warszawa, styczeń 2008

# Emerytura w „nowym systemie” – I filar

$$B_x^I = \frac{\sum C_{t,ind} + K_{ind}}{e_x}$$

B. Więckowska, J. Bijak, Wpływ zmiany systemowej na wysokość świadczeń emerytalnych w Polsce, Problemy polityki społecznej, nr 12, grudzień 2009.



$$B = K_0 \cdot \frac{\left(1 - \frac{1}{37} \cdot \sum_{k=0}^{36} (36 - k) \cdot v^{\frac{k+1}{12}} \cdot {}_{\frac{k}{12}}p_x \cdot q_{x+\frac{k}{12}}\right)}{12 \cdot (1 + cst) \cdot a_x}$$

B. Więckowska, J. Bijak, Wpływ zmiany systemowej na wysokość świadczeń emerytalnych w Polsce, Problemy polityki społecznej, nr 12, grudzień 2009.

Lp	Płeć*	Wiek	Lata składkowe	Lata nieskładkowe**	Wskaźnik wysokości podstawy wymiaru***
1	K	60	30	5	50%
2	K	60	30	5	100%
3	K	60	30	5	250%
4	K	60	30	5	300%
5	M	65	35	5	50%
6	M	65	35	5	100%
7	M	65	35	5	250%
8	M	65	35	5	300%

B. Więckowska, J. Bijak, Wpływ zmiany systemowej na wysokość świadczeń emerytalnych w Polsce, Problemy polityki społecznej, nr 12, grudzień 2009.

- ❖ wynagrodzenie bazowe określone zostało na poziomie 2.317,77 zł – jest to kwota odpowiadająca kwocie bazowej w wysokości 2.000,00 zł
- ❖ średnioroczna stopa wzrostu płac – 2%,
- ❖ średnioroczna stopa zwrotu z OFE – 5%,
- ❖ techniczna stopa zwrotu dla dożywotnich emerytur kapitałowych – 1%,
- ❖ koszty administracyjne wypłaty dożywotnich emerytur kapitałowych – 3,5% wartości miesięcznego świadczenia

B. Więckowska, J. Bijak, Wpływ zmiany systemowej na wysokość świadczeń emerytalnych w Polsce, Problemy polityki społecznej, nr 12, grudzień 2009.

Lp	„Przekrojowa” stopa zastąpienia		„Kohortowa” stopa zastąpienia	
	I filar + okresowa emerytura kapitałowa	I filar + okresowa emerytura kapitałowa	I filar + okresowa emerytura kapitałowa	I filar + dożywotnia emerytura kapitałowa
1	35,53%	43,39%	32,37%	39,10%
2	35,53%	43,39%	32,37%	39,10%
3	35,53%	43,39%	32,37%	39,10%
4	29,61%	36,16%	26,97%	32,58%
5	-	58,04%	-	51,44%
6	-	58,04%	-	51,44%
7	-	58,04%	-	51,44%
8	-	48,37%	-	42,86%

## Wnioski

- ❖ Prognozowanie natężenia umieralności w oparciu o odpowiednie dane pozwala obliczyć „prawdziwe” (kohortowe) dalsze trwanie życia
- ❖ Nawet wariant „najbardziej optymistyczny” przekrojowego  $e(x)$  był niższy niż „najbardziej pesymistyczny” wariant kohortowego  $e(x)$
- ❖ Wysokość świadczeń emerytalnych obliczona w oparciu o kohortowe TTŻ jest średnio o 10% niższa niż w przypadku tablic przekrojowych
- ❖ Stosowanie tablic przekrojowych może wiązać się z deficytem w funduszu emerytalnym, w szczególności w I filarze systemu emerytalnego



**Dziękuję za uwagę!**

Barbara Więckowska  
Katedra Ubezpieczenia Społecznego  
Szkoła Główna Handlowa w Warszawie  
ul. Wiśniowa 41 pok.35  
E-mail: [bawie@sgh.waw.pl](mailto:bawie@sgh.waw.pl)